Chapter 1

Autonomni rovnice

Postup popsani grafu reseni autonomni rovnice $y' = g(y)$. V pisemce je krome nize popsaneho postupu tez potreba nacrtnout obrazek toho, jak vypadaji maximalni reseni. Pripomenme, ze $y(x)$, $x \in (a, b)$ je resenim dane autonomni rovnice prave tehdy kdyz, $y_c(x) = y(x-c)$, $x \in (a+c, b+c)$ je resenim te same autonomni rovnice, kde c je libovolne realne cislo. Znakem R_f budeme znacit obor hodnot f a znakem D_f definicni obor f.

(1) Pokud je potreba, tak prevedeme rovnici na autonomni rovnici a urcime funkci g.

(2) Nalezneme body, kde je funkce g nulova a tim tez nalezneme stacionarni reseni.

(3) Nalezneme maximalni otevrene intervaly, na nichz je funkce g spojita a nenulova. Necht $J = (a, b)$ je jeden z prave nalezenych intervalu. V krocich (4), (5) a (6) budeme popisovat definicni obor a monotonii nejakeho reseni $y_{J,A}(x)$, $x \in D_{y_{J,A}} = (A, B)$, $A, B \in \mathbb{R}^*$, jehoz hodnoty pokryvaji tento interval ($R(y_{J,A}) = J$).

(4) Zjistime, zda je funkce g na intervalu J kladna ci zaporna. Pokud je kladna, tak $y_{J,A}$ je rostouci a pokud zaporna, tak klesajici.

(5) Necht $c \in (a, b)$. Vysetreni konvergence integralu $\int_a^c \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_c^b \frac{1}{g(y)} dy$. Pouzivame hlavne vety 7 a 8 a Limitni srovnavaci kriterium z 3. semestru.

(6) Zbyva nam urcit, zda body $A, B \in \mathbb{R}$ nebo jsou nevlastni. Pokud je $y_{J,A}$ rostouci (viz bod(4)), tak $A \in \mathbb{R}$ prave tehdy kdyz $\int_a^c \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje a $B \in \mathbb{R}$ prave tehdy kdyz $\int_c^b \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje (integraly z kroku (5)). Pokud je $y_{J,A}$ klesajici, tak se to prohodi $\left((A \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\int_c^b \frac{1}{g(y)} dy \in \mathbb{R} \right) \text{ a } (B \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \left(\int_a^c \frac{1}{g(y)} dy \in \mathbb{R} \right) \right)$.

(7) V pripade, ze puvodni rovnice nebyla autonomni rovnice, tak zjistit, zda neexistuji reseni, jez se nam prevodem na autonomni tvar ztratily.

(8) Zjistime, zda se daji reseni popsana v predchozich krocich vzajemne slepit. Popiseme vsechny maximalni reseni puvodni rovnice.

(9) Pokud je v prikladu nejaka dodatecna podminka, tak zjistime, ktera maximalni reseni tuto podminku splnuji.

1.0.1 $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$

(1) $g(y) = \frac{y^2+1}{y-1}$.

(2) $\emptyset$.

(3) $J_1 = (-\infty, 1)$, $J_2 = (1, +\infty)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{y}$ plyne, ze $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji. Z Lemma 7 plyne, ze $\int_0^1 \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_1^2 \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji.

(6) Reseni s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni nelze lepit v $y = 1$ neb rovnice pro $y = 1$ neni definovana. Vsechna reseni jsou tedy popsana jiz v kroku (6).

1.0.2 $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$

(1) $g(y) = \frac{y^3+1}{y-1}$.

(2) $\{-1\}$, $y_{st}(x) = -1$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 1)$, $J_3 = (1, +\infty)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_3 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{y^2}$ plyne, ze $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z Lemma 7 plyne, ze $\int_0^1 \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_1^2 \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z Lemma 8 plyne, ze $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{-1}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji.

(6) Reseni s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni s hodnotami v intervalu J_3 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni nelze lepit v $y = -1$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u -1 diverguje. Reseni nelze lepit v $y = 1$ neb rovnice pro $y = 1$ neni definovana. Vsechna reseni jsou tedy popsana jiz v krocich (2) a (6).

1.0.3 $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$

(1) $g(y) = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$.

(2) $\{-1, 1\}$, $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{-1, 1\}$.

(3) $J_1 = (-1, 0)$, $J_2 = (0, 1)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{y+1}}$ plyne, ze $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje. Z Lemma 7 plyne, ze $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{1-y}}$ plyne, ze $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje.

(6) Reseni $\tilde{y}_A^-$ s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni $\tilde{y}_A^+$ s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni lze lepit v $y = \pm 1$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u ± 1 konverguje, $g(\pm 1) = 0$ a g je spojita v ± 1. Reseni nelze lepit v $y = 0$ neb rovnice pro $y = 0$ neni definovana. Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{-1, 1\}$.
- Nerostouci reseni y_A^-, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_A^-$ a $y_{st,-1}$ a jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$.
- Neklesajici reseni y_A^+, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_A^+$ a $y_{st,1}$ a jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$.

1.0.4 $y' = (y + 1)(y + 2)(y + 3)$

(1) $g(y) = (y + 1)(y + 2)(y + 3)$.

(2) $\{-3, -2, -1\}$, $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{-3, -2, -1\}$.

(3) $J_1 = (-\infty, -3)$, $J_2 = (-3, -2)$, $J_3 = (-2(, -1)$, $J_4 = (-1, +\infty)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_3 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_4 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{y^3}$ plyne, ze $\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z Lemma 8 plyne, ze $\int_{-4}^{-3} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-3}^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-\frac{5}{2}}^{-2} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-2}^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{-1}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji.

(6) Reseni s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na $\mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni s hodnotami v intervalu J_3 jsou definovana na $\mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni s hodnotami v intervalu J_4 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni nelze lepit v $y = -1, -2, -3$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $-1, -2, -3$ diverguje. Vsechna reseni jsou tedy popsana jiz v krocich (2) a (6).

1.0.5 $y' = (y - 1)^2 \sqrt[3]{y - 2}(y - 3)$

(1) $g(y) = (y - 1)^2 \sqrt[3]{y - 2}(y - 3)$.

(2) $\{1, 2, 3\}$, $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

(3) $J_1 = (-\infty, 1)$, $J_2 = (1, 2)$, $J_3 = (2, 3)$, $J_4 = (3, +\infty)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_3 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_4 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{y^{\frac{10}{3}}}$ plyne, ze $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z LSK s $\frac{1}{(y-2)^{\frac{1}{3}}}$ plyne, ze $\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{2}^{\frac{5}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z Lemma 8 plyne, ze $\int_{0}^{1} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{\frac{5}{2}}^{3} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{3}^{4} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji.

(6) Reseni y_A^1 s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni $\tilde{y}_B^2$ s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni $\tilde{y}_B^3$ s hodnotami v intervalu J_3 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni y_B^4 s hodnotami v intervalu J_4 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni nelze lepit v $y = 1, 3$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $1, 3$ diverguje. Reseni lze lepit v $y = 2$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u 2 konverguje, $g(2) = 0$ a g je spojita v 2. Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Reseni y_A^1 a y_B^4, $A, B \in \mathbb{R}$ popsana v kroku (6).
- Neklesajici reseni y_B^2, $B \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_B^2$ a $y_{st,2}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.
- Nerostouci reseni y_B^3, $B \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_B^3$ a $y_{st,2}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.

1.0.6 $y' = \sqrt[3]{\sin(y)}$

(1) $g(y) = \sqrt[3]{\sin(y)}$.

(2) $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) $J_1^k = ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $J_2^k = (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Z 2π-periodicity funkce g plyne, ze staci resit jen intervaly J_1^0 a J_2^0. $y \in J_1^0 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_2^0 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ plyne, ze $\int_{-1}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_0^1 \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt[3]{y+\pi}}$ plyne, ze $\int_{-\pi}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt[3]{y-\pi}}$ plyne, ze $\int_1^{\pi} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje.

(6) Reseni $\tilde{y}_{A,k}^1$ s hodnotami v intervalu J_1^k, $k \in \mathbb{Z}$ jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni $\tilde{y}_{A,k}^2$ s hodnotami v intervalu J_2^k, $k \in \mathbb{Z}$ jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni lze lepit v $y = k\pi$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $k\pi$ konverguje, $g(k\pi) = 0$ a g je spojita v $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}(x) = i\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$.
- Nerostouci reseni $y_{A,k}^1$, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $y_{st,2k}$, $\tilde{y}_{A,k}^1$ a $y_{st,2k-1}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.
- Neklesajici reseni $y_{A,k}^2$, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $y_{st,2k}$, $\tilde{y}_{A,k}^2$ a $y_{st,2k+1}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.

1.0.7 $y' = \sqrt{|\cos(y)|}$

(1) $g(y) = \sqrt{|\cos(y)|}$.

(2) $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(3) $J^k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Z π-periodicity funkce g plyne, ze staci resit jen interval J^0. $y \in J^0 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{\left|y \pm \frac{\pi}{2}\right|}}$ plyne, ze $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji.

(6) Reseni s hodnotami v intervalu J^k jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni lze lepit v $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ z obou stran neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $\frac{\pi}{2} + k\pi$ konverguje, $g\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ a g je spojita v $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Existuje tedy mnoho maximalnich reseni, vsechna jsou neklesajici a definovana na $\mathbb{R}$.

1.0.8 $y' = \cos(y)\sqrt{\sin(y)}$

(1) $g(y) = \cos(y)\sqrt{\sin(y)}$.

(2) $\left\{k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(3) $J_1^k = \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $J_2^k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Z 2π-periodicity funkce g plyne, ze staci resit jen intervaly J_1^0 a J_2^0. $y \in J_1^0 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_2^0 \Rightarrow g(y) < 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{y}}$ plyne, ze $\int_0^1 \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{\pi - y}}$ plyne, ze $\int_2^{\pi} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje. Z Lemma 8 plyne, ze $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji.

(6) Reseni $\tilde{y}_{A,k}^1$ s hodnotami v intervalu J_1^k, $k \in \mathbb{Z}$ jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni $\tilde{y}_{A,k}^2$ s hodnotami v intervalu J_2^k, $k \in \mathbb{Z}$ jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici.

(8) Reseni nelze lepit v $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ diverguje. Reseni lze lepit v $y = k\pi$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $k\pi$ konverguje, $g(k\pi) = 0$ a g je spojita v $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (pro k sude zprava a pro k liche zleva). Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}^1(x) = i\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$.
- Stacionarni reseni $y_{st,i}^2(x) = \frac{\pi}{2} + 2i\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$.
- Neklesajici reseni $y_{A,k}^1$, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $y_{st,2k}^1$ a $\tilde{y}_{A,k}^1$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.
- Nerostouci reseni $y_{A,k}^2$, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $y_{st,2k+1}^1$ a $\tilde{y}_{A,k}^2$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.

1.0.9 $y' = \sqrt{e^{|y|} - 1} \cdot e^y \cdot (y - 1)$

(1) $g(y) = \sqrt{e^{|y|} - 1} \cdot e^y \cdot (y - 1)$.

(2) $\{0, 1\}$.

(3) $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, 1)$, $J_3 = (1, +\infty)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_3 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z LSK s $e^{-\frac{y}{3}}$ plyne, ze $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguje. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{|y|}}$ plyne, ze $\int_{-1}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z LSK s e^{-y} plyne, ze $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguje. Z Lemma 8 plyne, ze $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{1}^{2} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji.

(6) Reseni $\tilde{y}_A^1$ s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni $\tilde{y}_B^2$ s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni y_B^3 s hodnotami v intervalu J_3 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni nelze lepit v $y = 1$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u 1 diverguje. Reseni lze lepit v $y = 0$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u 0 konverguje, $g(0) = 0$ a g je spojita v 0. Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1\}$.
- Reseni y_B^3 popsana v kroku (6).
- Nerostouci reseni y_A^1, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $y_{st,0}$ a $\tilde{y}_A^1$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.
- Nerostouci reseni y_B^2, $B \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_B^2$ a $y_{st,0}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.
- Nerostouci reseni $y_{A,B}^{1,2}$, $A, B \in \mathbb{R}$, $A \leq B$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_B^2$, $y_{st,0}$ a $\tilde{y}_A^1$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.

1.0.10 $y' = \log(1 - \sqrt[3]{y}) \cdot \frac{y+1}{y+2}$

(1) $g(y) = \log(1 - \sqrt[3]{y}) \cdot \frac{y+1}{y+2}$.

(2) $\{-1, 0\}$.

(3) $J_1 = (-\infty, -2)$, $J_2 = (-2, -1)$, $J_3 = (-1, 0)$, $J_4 = (0, 1)$.

(4) $y \in J_1 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_3 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_4 \Rightarrow g(y) < 0$.

(5) Z LSK s $\frac{1}{y}$ plyne, ze $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguje. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ plyne, ze $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z Lemma 7 plyne, ze $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-2}^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z Lemma 8 plyne, ze $\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji.

(6) Reseni y_B^1 s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni y_B^2 s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni $\tilde{y}_B^3$ s hodnotami v intervalu J_3 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni $\tilde{y}_A^4$ s hodnotami v intervalu J_4 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici.

(8) Reseni nelze lepit v $y \in \{-2, 1\}$ neb rovnice pro $y \in \{-2, 1\}$ neni definovana. Reseni nelze lepit v $y = -1$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u -1 diverguje. Reseni lze lepit v $y = 0$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u 0 konverguje, $g(0) = 0$ a g je spojita v 0. Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{-1, 0\}$.

- Reseni y_B^1 a y_B^2 popsana v kroku (6).
- Neklesajici reseni y_B^3, $B \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_B^3$ a $y_{st,0}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.
- Nerostouci reseni y_A^4, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_A^4$ a $y_{st,0}$ a jsou definovana na intervalech $(A, +\infty)$.

1.0.11 $y' = \frac{\sqrt{1-\cos^2(y)} \cdot \sqrt[3]{y^2-1}}{\log((1+y)^2)}$

(1) $g(y) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(y)} \cdot \sqrt[3]{y^2-1}}{\log((1+y)^2)}$.

(2) $\{1\} \cup \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(3) $J^k = (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $J_1 = (-\pi, -2)$, $J_2 = (-2, -1)$, $J_3 = (-1, 0)$, $J_4 = (0, 1)$, $J_5 = (1, \pi)$.

(4) $y \in J^k \Rightarrow g(y) > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$, $y \in J_1 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_2 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_3 \Rightarrow g(y) > 0$, $y \in J_4 \Rightarrow g(y) < 0$, $y \in J_5 \Rightarrow g(y) > 0$.

(5) Z Lemma 8 plyne, ze $\int_{k\pi-1}^{k\pi} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{k\pi}^{k\pi+1} \frac{1}{g(y)} dy$ diverguji pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$. Z Lemma 7 plyne, ze $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-2}^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$, $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt{|y+1|}}$ plyne, ze $\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji. Z LSK s $\frac{1}{\sqrt[3]{y-1}}$ plyne, ze $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{g(y)} dy$ a $\int_{1}^{2} \frac{1}{g(y)} dy$ konverguji.

(6) Reseni y^k s hodnotami v intervalu J^k jsou definovana na $\mathbb{R}$ a jsou rostouci, kde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$. Reseni y_B^1 s hodnotami v intervalu J_1 jsou definovana na intervalech typu $(-\infty, B)$, kde $B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni y_A^2 s hodnotami v intervalu J_2 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni y_A^3 s hodnotami v intervalu J_3 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci. Reseni $\tilde{y}_B^4$ s hodnotami v intervalu J_4 jsou definovana na intervalech typu (A, B), kde $A, B \in \mathbb{R}$ a jsou klesajici. Reseni $\tilde{y}_A^5$ s hodnotami v intervalu J_5 jsou definovana na intervalech typu $(A, +\infty)$, kde $A \in \mathbb{R}$ a jsou rostouci.

(8) Reseni nelze lepit v $y \in \{-2, -1, 0\}$ neb rovnice pro $y \in \{-2, -1, 0\}$ neni definovana. Reseni nelze lepit v $y = k\pi$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u $k\pi$ diverguje pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Reseni lze lepit v $y = 1$ neb $\int \frac{1}{g(y)} dy$ u 1 konverguje, $g(1) = 0$ a g je spojita v 1. Existuji tedy nasledujici maximalni reseni:

- Stacionarni reseni $y_{st,i}(x) = i$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \{1\} \cup \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Reseni y^k, y_B^1, y_A^2 a y_A^3 popsana v kroku (6).
- Nerostouci reseni y_B^4, $B \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $y_{st,1}$ a $\tilde{y}_B^4$ a jsou definovana na intervalech $(-\infty, B)$.
- Neklesajici reseni y_A^5, $A \in \mathbb{R}$, jez vniknou slepenim $\tilde{y}_A^5$ a $y_{st,1}$ a jsou definovana na $\mathbb{R}$.